Rozwiązanie algebraiczne do zadania 3 (Lekcja 3)

(a)

$U_1(x,y) = xy$, $U_2(x,y) = x^{0,5}y^{1,5}$
$U_1(x_1,y_1) = x_1^{\alpha}y_1^{\beta}$
$U_2(x_2,y_2) = x_2^{\gamma}y_2^{\mu}$
W przypadku funkcji CD funkcje popytu opisane są wzorem:

$$x_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m_1}{p_x}$$
$$y_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{m_1}{p_y}$$
$$x_2 = \frac{\gamma}{\gamma+\mu}\frac{m_2}{p_x}$$
$$y_2 = \frac{\mu}{\gamma+\mu}\frac{m_2}{p_y}$$
$$m_1 = p_x\omega_{x_1} + p_y\omega_{y_1}$$
$$m_2 = p_x\omega_{x_2} + p_y\omega_{y_2}$$

Wstawiając do warunku na równowagę ogólną mamy:

$$p_x = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\omega_{y_1} + \frac{\gamma}{\gamma+\mu}\omega_{y_2}}{\frac{\beta}{\alpha+\beta}\omega_{x_1} + \frac{\mu}{\gamma+\mu}\omega_{x_2}}$$

Lub też zapisując inaczej:

$$p_x = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\omega_{y_1} + \frac{\gamma}{\gamma+\mu}\omega_{y_2}}{(1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta})\omega_{x_1} + (1-\frac{\gamma}{\gamma+\mu})\omega_{x_2}}$$

Krzywa kontraktu dana jest wzorem:

$$y_1 = \frac{\gamma c_y * x_1}{\mu(c_x - x_1) + \gamma x_1} = \frac{15x_1}{45 - x_1}$$

$p_x = 0,5$, $x_1 = 15$, $y_1 = 7,5$

(b)

$U_1(x,y) = 4x + 2y$, $U_2(x,y) = x + y$
Kiedy obydwie osoby mają funkcje liniowe to mamy dwa przypadki (graficznie rzecz ujmując) w zależności od tego, kto ma bardziej/mniej strome. Albo lądujemy z krzywą kontraktu na dole i z prawej albo na górze i z lewej.
W tym przypadku warunek o równości MRSów nigdy nie jest spełniony. Relacja cen albo jest równa jednemu MRSowi albo drugiemu albo cokolwiek pomiędzy. Mamy zawsze nieskończenie wiele równowagowych relacji cen i możemy podać jedynie przedział. Wynika to z tego, że mamy rozwiązania brzegowe (lądujemy na krawędzi diagramu).
Nie da się więc podać jednoznacznej odpowiedzi a jedynie przybliżenie.

(c)

$U_1(x,y) = xy$, $U_2(x,y) = x + 3y$
Prosta sytuacja. Ponieważ jedna osoba ma liniową użyteczność to automatycznie mamy na sztywno wyznaczoną relację cen. Bardzo łatwo jest wyliczyć krzywą kontraktu.
Tak jak w poprzednim podpunkcie może się zdarzyć, że wpadamy w rozwiązania brzegowe (w naszych realiach gdy jesteśmy w prawym górnym roku diagramu). Wtedy też równowagowa relacja cen nie jest wyznaczona jednoznacznie.
Równanie krzywej kontraktu: $y_1 = \frac{x}{3}$.
$p_x = \frac{1}{3}$, $x_1 = 20$, $y_1 = \frac{20}{3}$
Oczywiście tam gdzie rozwiązania brzegowe nie potrafimy wyznaczyć relacji cen jednoznacznie, a wyłącznie przedziały.

(e)

$U_1(x,y) = x^{0,5}y^{0,5}$, $U_2(x,y) = \min\{x, 2y\}$
Krzywa kontraktu to linia łącząca czubki funkcji minimum.
UWAGA: Tutaj nie mamy rozwiązań brzegowych. Ze względu na charakter funkcji minimum nie są one Pareto optymalne. Jeżeli jesteśmy na dolnej lub lewej krawędzi (gdy druga osoba ma użyteczność min), to możemy się przesunąć zawsze w prawo/do góry aż do krzywej kontraktu wyznaczonej przez łączenie dziubków w funkcji minimum bez zmniejszania użyteczności drugiej osoby, a zwiększając pierwszej.
Krzywa kontraktu: $y_1 = 15 + 0,5x_1$
$p_x = \frac{y_1}{x_1} = 2,68$, $x_1 = 6,86$, $y_1 = 18,43$

Pozostałe podpunkty proszę zrobić samodzielnie. Nie zapomnieć o graficznym rozwiązaniu!